Лекция 5

Уравнения в частных производных первого порядка

1. Однородные линейные уравнения в частных производных первого порядка

Пусть D ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in D$.

Опр. 5. Однородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in D; \tag{1}$$

здесь $u(x_1, \ldots, x_n)$ искомая функция, $a_i(\vec{x})$, $i = 1, \ldots, n$ заданные функции.

Опр. 6. Неоднородным линейным уравнением в частных производных первого порядка называется уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} = a_{n+1}(\vec{x}); \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in D; \tag{1'}$$

$a_{n+1}(\vec{x}) \neq 0$ в D; $a_{n+1}(\vec{x})$ также заданная функция.

Будем рассматривать однородное уравнение (1) при условии, что $a_i(\vec{x}) \in C^1(D)$.

Опр. 7. Решением уравнения (1) называется функция $u(\vec{x}) \in C^1(D)$, обращающая это уравнение в верное равенство $\forall\, \vec{x} \in D$.

Сопоставим уравнению (1) автономную систему ОДУ вида

$$\dot{\vec{x}} = \vec{a}(\vec{x}), \qquad \vec{a}(\vec{x}) \equiv \big(a_1(\vec{x}), \ldots, a_n(\vec{x})\big). \tag{2}$$

Опр. 8. Система (2) называется **характеристической системой для уравнения в частных производных** (1), а ее фазовые траектории **характеристиками**.

Теорема 8.
Функция $u(\vec{x}) \in C^1(D)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда $u(\vec{x})$ – первый интеграл системы (2) или $u(\vec{x}) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Данная теорема является всего лишь перефразированным следствием из теоремы 2, если это следствие рассматривать с точки зрения не системы, а УЧП. □

Из свойств первых интегралов, доказанных ранее , вытекает, на основании доказанной теоремы 8, следующее свойство решений уравнения (1).

Теорема 9.
Если функции $u_1(\vec{x}),\ \ldots,\ u_k(\vec{x})$ *являются решениями уравнения* (1), *а* $\Phi(y_1,\ \ldots,\ y_k)$ – *функция класса* C^1 *от своих аргументов, то* $u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1(\vec{x}),\ \ldots,\ u_k(\vec{x})\big)$ *также является решением уравнения* (1).

Доказательство. Данная теорема является непосредственным следствием теоремы 3. □

Теорема 10.
В окрестности любой точки $P \in D$ *существует* $(n-1)$ *независимых решений* $u_1^*(\vec{x}),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(\vec{x})$ *уравнения* (1), *а общее решение этого уравнения задается формулой*

$$u(\vec{x}) = \Phi\big(u_1^*(\vec{x}),\ \ldots,\ u_{n-1}^*(\vec{x})\big), \tag{3}$$

где $\Phi(y_1,\ \ldots,\ y_k)$ – *произвольная функция класса* C^1.

Доказательство. В силу условия $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2(\vec{x}) > 0$ в каждой точке области D, каждая точка $P \in D$ не является точкой покоя характеристической системы (2), а тогда утверждение теоремы вытекает из теорем 1 и 4. □

Теорема 11.
Любое решение уравнения (1) *тождественно равно константе на любой характеристике.*

Доказательство. Если $u(\vec{x})$ решение уравнения (1), то в силу теоремы 8 $u(\vec{x})$ первый интеграл системы (2) (или $u(\vec{x}) \equiv \mathrm{const}$). Но в силу определения первого интеграла $u\big(\vec{x}(t)\big) \equiv \mathrm{const}$ на любом решении системы (2), т.е. на любой характеристике. □

Пример 3. Решим уравнение

$$x_2 \frac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

вне точки $\vec{x} \equiv \big(x_1,\ x_2\big) = 0$.

Характеристическая система имеет вид

$$\frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{-x_1},$$

первым интегралом является, например,

$$x_1^2 + x_2^2 = c.$$

Следовательно, общее решение рассматриваемого уравнения можно записать в виде

$$u = \Phi\big(x_1^2 + x_2^2\big), \qquad \text{где} \quad \Phi(y) \in C^1.$$

Это семейство поверхностей вращения.

2. Задача Коши для линейного уравнения в частных производных первого порядка

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид $D = D' \times \big(x_n^0 - h,\ x_n^0 + h\big)$, где D' область переменных $\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big)$ в R^{n-1}, $h = \text{const} > 0$.

Пусть на области D' задана функция $\varphi(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}) \in C^1(D')$ см. рис. 1.

Задача Коши для уравнения (1) заключается в том, чтобы найти решение $u(\vec{x})$ уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$u\big(x_1,\ \ldots,\ x_n\big)\Big|_{x_n = x_n^0} = \varphi\big(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1}\big). \tag{4}$$

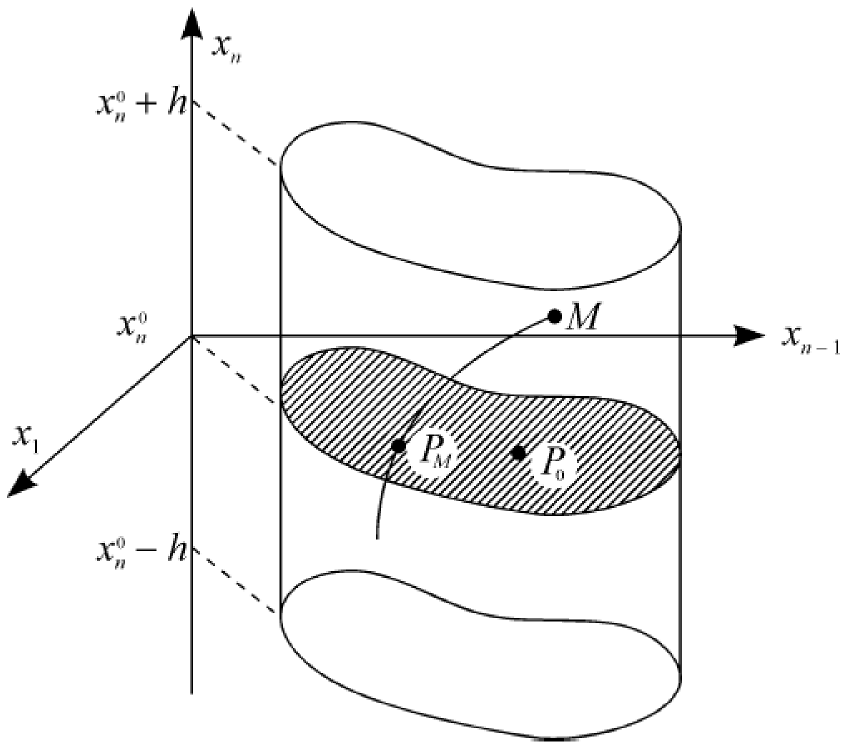

Рис. 1. Задача Коши.

Теорема 12 (существования и единственности решения задачи Коши).

Рассмотрим задачу Коши (1), (4). *Пусть коэффициенты* $a_i(\vec{x}) \in C^1(D)$, $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in C^1(D')$. *Пусть точка* $P^0 \equiv (x_1^0, \ldots, x_{n-1}^0, x_n^0) \in D$ *такова, что* $a_n(P^0) \neq 0$.

Тогда найдется окрестность точки P^0, *в которой существует решение* $u(\vec{x})$ *задачи Коши* (1), (4), *и оно единственно.*

Доказательство. **I. Существование решения.**

Рассмотрим характеристическую систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(\vec{x}), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(\vec{x}). \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку по условию теоремы $a_n(P^0) \neq 0$, то в силу теоремы 9.1 из главы 9, § 1, в окрестности точки P^0 существует $(n-1)$ независимых первых интегралов $\psi_1(\vec{x}), \ldots, \psi_{n-1}(\vec{x})$ системы (2). При этом поскольку $a_n(P^0) \neq 0$, то по той же теореме 9.1 в указанной окрестности точки P^0

Якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \xi_1 = \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_{n-1} = \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) \\ \xi_n = x_n. \end{cases}$$

Якобиан этой замены

$$\frac{D(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$$

в силу условия (5). Таким образом, замена переменных является невырожденной в окрестности точки P^0.

Перепишем уравнение (1) в новых переменных. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}.$$

Следовательно, уравнение (1) перепишется в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x}) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j}\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} \right) = 0.$$

Если $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_j}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k} = \left.\frac{d\psi_j}{dt}\right|_{\text{в силу системы}} = 0,$$

поскольку $\psi_j(\vec{x})$ первый интеграл системы (2). Если же $j = n$, то

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\vec{x})\,\frac{\partial \xi_n}{\partial x_k} = a_n(\vec{x}).$$

Таким образом, в новых переменных уравнение (1) записывается в виде

$$a_n\big(\vec{x}(\xi)\big)\frac{\partial u\big(\vec{x}(\xi)\big)}{\partial \xi_n} = 0.$$

Но в окрестности точки P^0 $a_n(\vec{x})$, поэтому окончательно получаем уравнение

$$\frac{\partial u\big(\vec{x}(\xi)\big)}{\partial \xi_n} = 0. \tag{6}$$

Начальное условие (4) в новых переменных перепишется в виде

$$u\big(\vec{x}(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0} = \varphi\big(x_1(\xi),\ \ldots,\ x_{n-1}(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0}.$$

Но тогда в силу (6) имеем

$$u\big(\vec{x}(\xi)\big) = u\big(\vec{x}(\xi)\big)\Big|_{\xi_n = x_n^0} =$$
$$= \varphi\left(x_1\big(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ x_n^0\big),\ \ldots,\ x_{n-1}\big(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n-1},\ x_n^0\big)\right). \tag{7}$$

Таким образом, решение уравнения (1) в окрестности точки P^0 существует и задается формулой (7).

II. Докажем единственность решения задачи Коши (1), (4).

Пусть, напротив, эта задача в некоторой окрестности точки P^0 имеет два решения $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$. Тогда функция $w(\vec{x}) = u(\vec{x}) - v(\vec{x})$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\vec{x})\, w = 0, \\ w\Big|_{x_n = x_n^0} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Рассмотрим семейство характеристик уравнения (1) в окрестности точки P^0.

По условию теоремы $a_n\big(P^0\big) \neq 0$, поэтому применима теорема 9.8 из главы 9, § 3, в силу которой существует такая окрестность точки P^0 для которой через каждую точку этой окрестности проходит характеристика и притом единственная.

Поскольку в системе (2) $a_n(\vec{x}) \neq 0$ в окрестности точки P^0, то, как можно показать, все характеристики пересекаю плоскость $x_n = x_n^0$ (возможно, для меньшей окрестности точки P^0).

Пусть теперь M произвольная точка выбранной окрестности. Проведем через нее характеристику до пересечения с плоскостью $x_n = x_n^0$ в некоторой точке P_M (см. рис. 1.).

С одной стороны, $w\big(P_M\big) = 0$ в силу (8).

С другой стороны, по доказанному в первой части теоремы, $w(\vec{x}) = \mathrm{const}$ на любой характеристике.

Следовательно, $w(M) = 0$. В силу произвольного выбора M имеем $w(\vec{x}) \equiv 0$ в окрестности точки P^0, т.е. $u(\vec{x}) = v(\vec{x})$. Противоречие. $\square$

Замечание 6. Геометрически задача Коши (1), (4) заключается в следующем:

– из каждой точки P плоскости $x_n = x_n^0$ в окрестности P^0 выпускаем характеристику;

– существует некоторая окрестность точки P^0, в которой эти характеристики не пересекаются и заполняют всю окрестность;

– вдоль характеристики «сносится» значение начальных данных $\varphi(P)$ без изменения, т.е. зная характеристики, мы решаем задачу Коши.

Замечание 7. По характеристикам «сносятся», вообще говоря, разные значения $\varphi(P)$ с плоскости $x_n = x_n^0$, поэтому решение задачи Коши будет существовать, пока характеристики не начнут пересекаться. Как только это произойдет, решение разрушается (см. рис. 2.)

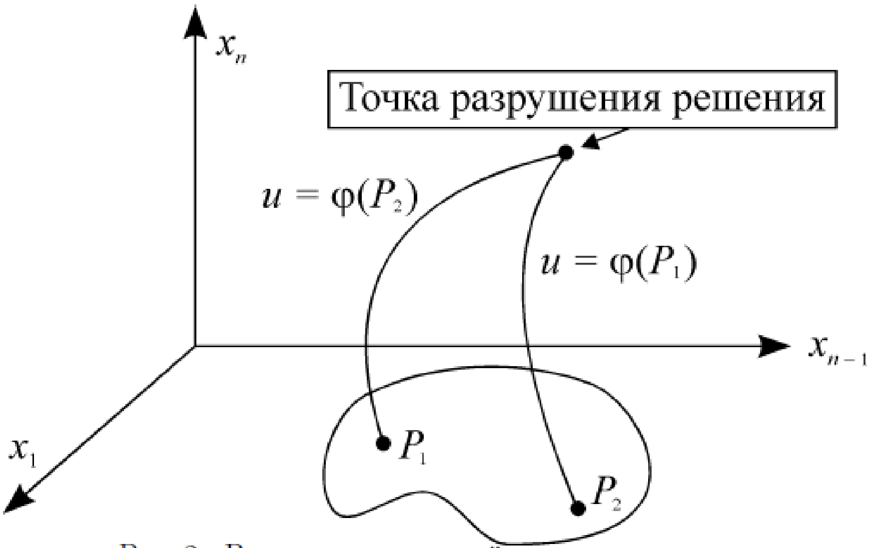

Рис. 2. Разрушение решений в точке пересечения характеристик.